Semaine pré rentrée Bac Techno 2010 IUT Auch

Fiche à composante ***maths***

Cette fiche est destinée aux étudiants admis à l'iut (plus particulièrement aux étudiants provenant de filière technologique) souhaitant une mise en niveau en outils mathématiques.. Cette fiche n'est pas exhaustive et elle ne reste qu'une trame de travail que chaque étudiant doit approfondir en fonction de ses besoins

Les notions abordées et qui seront à maitriser dans l'ensemble des cours dispensés en 1 er année, sont :

A) Raisonnement et logique

-logique (logique pure, homogénéité, variance d'un problème, cohérence d'un résultat)
-savoir mener un calcul littéral en remplaçant les lettres par leurs valeurs à la fin du calcul, savoir présenter un calcul de manière claire.

B) Proportionnalité

(-rappel :opérations sur les fractions)
-pourcentage
- règle de 3
- dilution
- conversion d'unités
-densité, etc…

C) Fonctions, graphes et équations

-notion de fonction
-équation de droite
-système linéaire de 2 équations à 2 inconnues
-équation du 2 nd degrés

D) Deux mots d'analyse

-fonction exp et ln
-dérivation (savoir dériver, équation de la tangente, interprétation)
-intégration (primitive, calcul d'intégrales, interprétation)
-calcul de surface et de volume

PARTIE A

Exercice 1
Traduire en langage ordinaire les phrases logiques suivantes.

a) $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists m \in \mathbb{N}, m > n$.

b) $\exists m \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{m} > n$.

c) $\forall x \in \mathbb{Q} \ \forall z \in \mathbb{Q} \ \exists y \in \mathbb{Q}, \ x < y < z$.

d) $\forall n \in \mathbb{N} \ \ (n > 3 \ \Rightarrow \ n > 6)$

e) . $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists m \in \mathbb{N}, \ m \leq n$

f) $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists p \in \mathbb{N} \ \ n = 2p + 1$.

g) $\forall x \in \mathbb{R} \ \ \left(x \leq 2 \ \Rightarrow x^2 \leq 4 \right)$

Exercice 2
Examinez la validité de chacune des assertions de l'exercice 1. Justifier

Exercice 3
Ecrire la négation des assertions de l'exercice 1 en utilisant le langage de la logique.

Exercice 4
Écrire en utilisant le langage de la logique les phrases suivantes.

a) Le carré de tout nombre réel est positif.
b) Un nombre entier divisible par 10 est divisible par 5.
c) Il existe un nombre impair divisible par 2.
d) Le produit de deux nombres réels est positif si et seulement si ces deux nombres réels sont de même signe.
e) Les deux seules solutions de l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$ sont 2 et 3.

Exercice 5
Les propositions de l'exercice 4 sont-elles vraies ?

Exercice 6
Nier la phrase « toutes les mamans qui ont un fils aux cheveux châtains partiront en vacances avant 50 ans et iront au cinéma ».

Exercice 7
Construire les tables de vérité des propositions suivantes.

a) A ou B.
b) A et non(B).
c) $A \ \Rightarrow B$.
d) non(A) $\Rightarrow$ non(B).
e) non(B) $\Rightarrow$ non(A).
f) non(A ou B).

Exercice 8
a)Montrer que (1 = 2) $\Rightarrow$ (5 = 6).
b)Montrer que (1 =0) $\Rightarrow$ (2=0).
c) Chacune des propositions suivantes est–elle vraie ou fausse ?
1) 1 = 2.
2) 1 = 3.
3) (1 = 2) $\Rightarrow$ (1 = 3).

Exercice 9
Prouver les propriétés suivantes par récurrence.

a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

b) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{i=0}^{n}(2i+1)=(n+1)^2$

Prouver la question b à l'aide de la question a sans récurrence.

Exercice 10

Écrire la contraposée des implications suivantes et les démontrer (*n* est un entier naturel, *x* et *y* sont des réels).

a) *n* est premier $\Rightarrow n = 2$ ou *n* est impair.

b) $x \neq 0 \ \wedge\ y \neq 0 \ \Rightarrow\ xy \neq 0$

c) $x \neq y \ \Rightarrow\ [(x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)]$

Exercice 11

Prouver l'assertion : $(\forall \varepsilon > 0 \quad |a| < \varepsilon\ ) \ \Rightarrow\ a = 0$.

Exercice 12

a)En raisonnant par l'absurde, montrer que si un entier *q* > 1 divise l'entier *n* > 0, alors *q* ne divise pas *n* +1.

b) On note P l'ensemble des nombres premiers. Le but de cet exercice est de montrer que cet ensemble est infini.

On suppose que P est fini, il existe donc $p_1, p_2, ..., p_n$ tels que $P=\{p_1, p_2, ..., p_n\}$.

i) Montrer que pour tout i, p_i ne divise pas $p_1 p_2 ... p_n + 1$ [on utilisera a)]

ii) Conclure.

Exercice 13

a) Peut on résoudre un système à 2 inconnues avec une équation ?
b) Peut on calculer la masse d'un arbre connaissant sa taille et son âge ?
c) Peut on calculer la masse molaire d'un composé chimique inconnu connaissant uniquement sa masse ?
d) Peut on calculer le volume d'eau que contient une piscine connaissant sa largeur et sa longueur ?
e) Peut on calculer la vitesse d'une planche a voile supposée évoluer sans frottements sachant que le vent est de 25 nœuds ?

Exercice 14

Une agence immobiliere met en vente un terrain rectangulaire de largeur y et de longeur x (les valeurs x et y sont exprimées en m). Le prix au metre carré est noté c

1) Quelle est l'unité de c ?
2) Exprimer le prix du terrain en fonction des donnees ?
3) La surface maximale d'une maison que l'on peut construire sur un terrain est (dans cette commune) 8% de la surface du terrain. Calculer la surface maximale d'une maison construite sur ce terrain ?
4) Le prix de construction de la maison (seule) est p euros au metre carré. Calculer le prix de la maison ainsi que le prix final (maison + terrain)

Exercice 15
Retrouver l' unité correspondante et adéquate pour un nombre exprimé en :
a) $V\ A^{-1}$
b) $\mathrm{C} \times \mathrm{s}^{-1}$ (C représente des Coulombs)
c) $kg \times \mathrm{m}^2 \times \mathrm{s}^{-2}$
d) $\mathrm{N} \times \mathrm{m}^{-1} \times s^2 \times kg^{-1}$ (N représente des newtons, m des mètres, s des secondes)

Exercice 16
Les formules suivantes peuvent elle être valides ?
a) $U = R^2 I$
b) $n = \dfrac{m}{M^3 \ln(M)}$ n désigne un nombre de moles, m une masse, M masse molaire
c) $\varepsilon = \dfrac{1}{17}\dfrac{P \times v^2}{a}$ ou P désigne un poids, v une vitesse, a une accélération et ε une énergie.

PARTIE B

Exercice 1 (rappel sur les fractions)
Soient $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$ deux fractions, donner sous forme littérale le résultat des 4 opérations élémentaires sur ces 2 fractions.

Exercice 2 (Ptit tour d'horizon)
a) Un fabricant facture 350 chaises identiques au prix de 5 600 €. Quel aurait été le prix de 1 250 de ces chaises ?

b) Sur un plan à l'échelle 1/50 la longueur d'une maison est 30 cm. Sur un plan à l'échelle 1/100 sa largeur est 1 dm. Quelles sont les dimensions réelles de la maison ?

c) Le prix d'un abonnement à une revue est de 40 €. On propose une réduction de 15 % sur ce prix. Quel est le prix payé ?

d) Paul achète un appareil électrique. Le commerçant lui consent une réduction de 10 %. Il paye 540 €. Quel était le prix marqué sur l'appareil (avant la réduction) ?

e) On a payé 35 € pour 5 paquets de feuilles et 2 classeurs. Combien paiera - t - on pour 20 paquets de feuilles et 4 classeurs ?

f) On a payé un rôti de 750 grammes 15 €. Quel est le prix du kilogramme ?

g) On expédie 3 colis identiques pour 36 €. Combien paiera - t - on si on expédie :
6 colis identiques, 2 colis identiques, 4 colis identiques ?

h) 9 trucs coûtent 5 euros. Combien de trucs peut-on acheter avec 75 euros ?

i)Le tableau suivant est-il un tableau de proportionnalité ?

3	8	6	12	10	100	0,3
15	40	30	60	50	500	1,5

j) Un randonneur parcourt 3 kms en 40 minutes. Quelle est sa vitesse moyenne ?

Exercice 3
i) Par quoi faut il multiplier un prix qui augmente de 7 % ?
ii) Par quoi faut il multiplier un prix qui diminue de 13 % ?
iii) Un prix subit une augmentation de 20 % suivie d'une diminution de 20 %. Exprimez le nouveau prix.

Exercice 4
La terre a un rayon de 6400 km et une circonférence de 40 000 km. Sans calculatrice et sans valeur de π, déterminer le périmètre d'un cercle de 16 m.

Exercice 5 (Dilution)
On dispose de 3 litres d'une solution à 1,2 mole par litre.
a) Comment pratiquer pour fabriquer 1 litre de solution à 0,4 mole par litre
b) Comment pratiquer pour fabriquer 1650 millilitres d'une solution à 0,1 mole par litre ?
b) Peut on fabriquer 3 décilitres une solution à 1, 5 mole par litre avec la solution de départ ?

Exercice 6 (Conversion)
Donner les correspondances entre les unités suivantes :
i) g, kg, tonne,
ii) km, m, cm, mm
iii) litre, décilitre, centilitre, millilitre
iii) cm^2, m^2
iv) litre, cm^3, m^3

Exercice 7 (en base 60)
i) convertir 4265 secondes en heure minute seconde
ii) combien de minute seconde représente 0,32 h

Exercice 8 (masse volumique – densité)
a) Donner une unité possible pour la masse volumique
b) Quelle est la masse volumique de l'eau ?
c) La masse volumique du sapin est 450 kg . m^{-3} , combien pèse une planche en sapin ayant les dimensions suivantes : largeur 45 cm, longueur 1,2m, épaisseur 0,6 cm

d) La densité d'un corps est le rapport entre sa masse volumique et la masse volumique d'un corps de référence. Le corps de référence est l'eau (pour les liquides et les solides) et l'air pour les gaz. La densité est une grandeur sans dimension et sa valeur s'exprime donc sans unité de mesure . Donner une autre définition de la densité ne faisant intervenir que la masse.

e) la densité du pétrole est 0,8. Calculer la masse d'un litre de pétrole ?

PARTIE C

Exercice 1

1)Calculer l'équation de la droite passant par les points A et B de coordonnées respectives (1 ;0) et (3 ;5)

2) Calculer l'équation de la droite passant par A de coordonnés (-3 ;-1) ayant -2 comme coefficient directeur

3) Expliquer comment lire le coefficient directeur d'une droite à partir de sa représentation. Faire un dessin

Exercice 2

Soit (D1) et (D2) les droites d'équation respectives y=4x -1 et y = -x+6
Calculer les coordonnées du point d'intersection.

Exercice 3

Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 5x+4y=16 \end{cases}$

a) par méthode de substitution
b) par la méthode d'addition
c) graphiquement

Résoudre par la méthode de votre choix les systèmes suivants (vérifiez vos résultats) :

1) $\begin{cases} 7x+4y=18 \\ 2x+8y=12 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{3}{2}x-y=7 \\ 9x-6y=42 \end{cases}$

Exercice 4

En 1990, dans un bar d'Auch, à une première table on a servi 3 oranginas et 2 cocas pour 39 F et à une seconde table on a servi 1 orangina et 3 cocas pour 34 F. Combien coûte l'orangina ? Combien coûte le coca ?

Exercice 5

Un terrain rectangulaire a un périmètre de 750 m. La longueur mesure 15 m de plus que la largeur. Calculer les dimensions du rectangle

Exercice 6

Résoudre les équations suivantes :

1) (x-4)(x+2)=0 2) $x^2=5$ 3) $(x+1)^2=25$
4) $(x-3)^2=-36$ 5) $x^2+2x+1=0$ 6) $x^2-7x+3=0$
7) $2x^2-3x+5=0$ 8) $e^{2x}-7e^x+3=0$

PARTIE D

Exercice 1

Soient $f(x)=e^x$ et $g(x)=\ln(x)$. Pour f et g donner le domaine de dérivabilité, calculer la dérivée, faire le tableau de variation ainsi qu'une représentation graphique. Donner une primitive. Y a-t-il un lien entre f et g ?

Exercice 2 (approximation linéaire et plus)

a)Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Donner l'équation de la tangente à f en un point a appartenant à I .

b) Calculer l'équation de la tangente en x=0 pour la fonction $f_1(x)=e^x$.

c) En vous inspirant de ce genre d'approximation, donner une valeur approchée de $e^{0,1}$ puis de $\sqrt{1,05}$.

En généralisant ce genre de technique, on peut montrer que pour tout réel x, on a :

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Exercice 3

Soit x un réel strictement positif. Quels sont les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $(1+x)^n > 1+nx$?

Exercice 4

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Calculer les dérivées des fonctions suivantes en fonction de celle de f et de g :

a) f+g b) f-g c) 3f+4g d) f/g e) $f \times g$ g) fog h) f^2

i) ln(f+g) j) e^{2f+3}

Exercice 5

Dériver les fonctions suivantes :

a) $f_1(x)=3x+5$ b) $f_2(x)=x^4-3x^3+5x^2-8x+4$ c) $f_3(x)=\ln(x^2+e^x)$

d) $f_4(x)=\sin(3x)$ e) $f_5(x)=\cos(x^2)$ f) $f_6(x)=\tan(x)$

g) $f_7(x)=\dfrac{x^2+3x-1}{x-1}$ h) $f_8(x)=\dfrac{1}{x}$ i) $f_8(x)=\sqrt{3x^2+1}$

j) $f_9(x)=\dfrac{1}{x-1}e^{x^2}$ k) $f_{10}(x)=x/\ln(x)$

Exercice 6

Calculer une primitive des fonctions suivantes :

a) $f_1(x)=e^x$ b) $f_2(x)=1/x$ c) $f_3(x)=x^2-4x+3$

d) $f_4(x)=\sqrt{x}$ e) $f_5(x)=\dfrac{1}{x\ln(x)}$ g) $f_6(x)=xe^{-x^2}$

Exercice 7

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_{0}^{2} x \; dx$ (vérifier la valeur trouvée à l'aide d'un dessin) b) $\int_{-1}^{5} x^3 \; -5x + 7 \; dx$

c) $\int_{0}^{\pi} \cos(x) \; dx$ d) $\int_{0}^{2\pi} \sin(3x) \; dx$ e) $\int_{0}^{\pi/2} \cos(x)^2 \; dx$ f) $\int_{1}^{2} \frac{e^{\ln(x)}}{x} \; dx$

g) $\int_{2}^{3} \ln(x) \; dx$ h) $\int_{1}^{3} 5\sqrt{x} \; dx$ i) $\int_{1}^{5} \frac{1}{\sqrt{x}} \; dx$

Exercice 8

Soit M un réel strictement positif. Calculer

I= $\int_{1}^{M} \frac{1}{x} \; dx$ J= $\int_{1}^{M} \frac{1}{x^{1,1}} \; dx$ et K = $\int_{1}^{M} \frac{1}{x^2} \; dx$

Exercice 9

Retrouver la formule du volume d'un cylindre, d'un cone, et d'une sphére.